конструкций в этих задачах. На основе метода Галеркина проведены численные эксперименты, показавшие удовлетворительное согласование необходимых и достаточных условий, полученных численно, с достаточными условиями, полученными аналитически на основе исследования функционалов.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНЫЙ КОНСЕРВАТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Ю.В. Буяльская, В.М. Волков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
julie-comtesse@mail.ru, v.volkov@tut.by

Рассматривается класс нелинейных двухточечных краевых задач, возникающих при математическом моделировании волоконно-оптических усилителей [1]:

$$M\frac{dE}{dz} = [\gamma - G(E)]E, \quad -1 < z < 1, \quad R_m E(-L) = g_m, \quad R_p E(L) = g_p. \tag{1}$$

Здесь $E = (E_1, E_2, \dots E_n)^T$, E_k — комплексные огибающие аплидуды световых волн, M — диагональная матрица, $\{M_{kk}\} = \pm 1$, определяющая направления распространения волн, $G(E)$ — матрица, элементы которой $\{G_{mk}\} = g_{mk}E_k^* E_m$ определяют взаимодействие компонент E_k и E_m, причем $g_{mk} = -g_{km}$, R_m, R_p — матрицы, определяющие краевые условия на левой и правой границах соответственно, γ — постоянная поглощения.

Дискретизация дифференциальной задачи (1) на сетке узлов $z_j = \cos[j\pi/(N-1)]$, $j = \overline{0, N-1}$, с использованием матрицы спектрального дифференцирования Чебышева [2] приводит к системе $N\dot{n}$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$(D - F(U))U = \Psi. \tag{2}$$

Здесь $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$, $U_m = (u_m^1, u_m^2, \dots u_m^N)^T$, D — блочно-диагональная матрица, компоненты которой $\{D_{mm}\} = M_{mm}C_m + \gamma I_m$, C_m, $I_m \in R^{N\times N}$ — матрица спектрального дифференцирования Чебышева, и единичная матрица соотвественно, первая или последняя строки которых модифицированы с учетом краевых условий для соотвествующей компоненты E_m, $F(U)$ — блочная матрица, с блоками $F_{mk} = \operatorname{diag}\{g_{mk}U_k^* U_m\} \in C^{N\times N}$. Вектор Ψ определяется краевыми условиями задачи.

Для реализации псевдоспектральной модели (2) предлагается итерационный метод вида

$$(D - F(U^{(s)}))U^{(s+1)} = \Psi, \quad s = 0, 1, \dots, \quad U^{(0)} = 0, \tag{3}$$

для которого имеет место

Лемма. *На каждом шаге итерационного метода* (3) *для задачи при* $\gamma \equiv 0$ *выполняется соотношение*

$$\sum_{m=1}^{n} \left|U_m^{(s)}\right|^2 = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Соотношение (4) является дискретным аналогом закона сохранения мощности излучения и одновременно гарантирует ограниченность приближенного решения на каждой итерации. Последнее обстоятельство положительно сказывается на вычислительных качествах консервативного итерационного метода (3). Численные эсперименты показывают, что скорость сходимости итерационного метода (3) сопоставима с традиционно используемым методом Ньютона (см. [3]), но в отличие последнего для достижения сходимости (3) не требуется специального выбора начального приближения.

Литература

1. Headley C., Agrawal G. P. *Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems.* Academic Press. San Diego, CA, 2005.

2. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB.* 2000. SIAM, Philadelphia.

3. Tarman H. I., Berberoglu H. *A spectral collocation algorithm for two-point boundary value problem in fiber Raman amplifier equations* // Optics Communications. 2009. Vol. 282, № 8. P. 1551–1556.

БИФУРКАЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА ЛОРЕНЦА

Т.А. Гурина

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

gurina-mai@mail.ru

Рассматриваются модели, описываемые многопараметрическими системами трех дифференциальных уравнений типа Лоренца (модель гиростата и экономическая модель средней фирмы):

$$\dot{x} = -\sigma x + \delta y, \quad \dot{y} = \mu x + \nu y - \beta xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + \alpha xy.$$

В качестве бифуркационных параметров рассматриваются μ, ν и γ, а параметры α, β, δ, σ фиксируются. Для особых точек систем построено разбиение пространства бифуркационных параметров на области по типу грубой особой точки линеаризованной системы. При пересечении границы области седло-фокуса с положительными действительными частями пары комплексно-сопряженных корней происходит бифуркация Андронова-Хопфа рождения устойчивого предельного цикла с последующим каскадом бифуркаций удвоения периода цикла и субгармоническим каскадом Шарковского, заканчивающегося рождением цикла периода три.

При дальнейшем изменении параметров в системе появляются циклы гомоклинического каскада бифуркаций, приводящего к образованию странного аттрактора. С помощью преобразований системы и доказательных вычислений показано существование гомоклинической траектории седло — фокуса, разрушение которой является главной бифуркацией гомоклинического каскада, и определена область параметров, в которой она существует.

Получены бифуркационные диаграммы, графики показателей Ляпунова, графики седлового числа, фрактальные размерности странного аттрактора.

Задачи стабилизации неустойчивых особых точек данных систем решаются методом расширенной управляющей системы. Получены параметры управляющих систем, обеспечивающие стабилизацию особой точки в интервале основного бифуркационного параметра, покрывающем область хаоса. Работа выполнена с применением системы Maple–13.